NOTAS DE MATEMATICA

Nº 31

SOBRE LA NO EXISTENCIA DE ESPACIOS SECUENCIALES COMPACTOS Y HAUSDORFF QUE POSEAN UNA COPIA DE S_2

POR

M. RAJAGOPALAN
AND
JORGE VIELMA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA
1979

RESUMEN

El propósito de este trabajo es presentar un resultado nuevo en el campo de las compactificaciones secuenciales. Se demuestra en efecto que el espacio S_2, y en general los espacios S_n no pueden ser sumergidos en un espacio secuencial compacto y Hausdorff.

Cabe destacar que con este trabajo damos respuesta a una interrogante, planteada por Franklin y Boone, de una manera diferente a la dada por M. Rajagopalan [1]. Al propio tiempo damos respuesta a dos problemas abiertos planteados por M. Rajagopalan [1] . Esta solución fue anticipada de una manera independiente y distinta por V. Kannan [3] .

SOBRE LA NO EXISTENCIA DE ESPACIOS SECUENCIALES COMPACTOS Y HAUSDORFF QUE POSEAN UNA COPIA DE S_2

M. Rajagopalan *   Jorge Vielma**

La demostración de esta importante afirmación será por contradicción. Así, supongamos que existe un espacio secuencial F compacto y Hausdorff que posee una copia de S_2. Es decir que existe un homemorfismo $\rho : S_2 \to A \subsetneq F$.

Consideremos primero algunos lemas de vital importancia.

LEMA 1.1.

El conjunto $A^1 - A$ no es vacío.

DEMOSTRACION:

Si suponemos que $A^1 - A = \emptyset$ obtenemos que $A^1 = A$ y en consecuencia que $\overline{A} = A$. Pero esto implica que A es un subconjunto cerrado del compacto F. Por lo tanto A es compacto. Es decir que S_2 es compacto lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A^1 - A \neq \emptyset$.

LEMA 1.2.

El punto $\rho(\omega) \in \overline{A^1 - A}$.

DEMOSTRACION:

Sea Θ un abierto arbitrario de F que contiene a $\rho(\omega)$, como F es compacto y Hausdorff se tiene que F es regular. Así,

* Auspiciado por el C.D.C.H. de la Universidad de los Andes.
Proyecto topológico C-100-78-79.

** Parte de Tesis de Maestría en la Universidad de Oriente Cumaná.

existe un abierto V en F tal que $\rho(\omega) \varepsilon V$ y $\overline{V} \subset \Theta$. Dado este V existe un abierto K tal que para todo $n \geq K$ todas las copias de $\rho[\pi^*(S_1^n)]$ menos un número finito de puntos aislados en cada una de ellas estan contenidos en V. Sea x_n el primer elemento en $\rho[\pi^*(S_1^n)] \cap V$ si $\rho[\pi^*(S_1^n)] \cap V \neq \emptyset$. Es evidente que x_n es aislado en A, para todo $n \varepsilon \mathbb{N}$, $n \geq K$. Es fácil demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ no tienen ningún punto limite en A. Pero $L = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots\}$, contiene algún punto límite $\ell \varepsilon F$, pues F es compacto, y $\ell \notin L$. Ahora como F es secuencial existe un ordinal $\beta \geq 1$ tal que $\ell \varepsilon L^\beta$. Por lo tanto $L^\beta \neq L$. Pero esto implica que $L^1 \neq L$, luego existe un elemento $z \varepsilon L^1 - L$. Ahora por otra parte, $z \varepsilon \overline{V}$ pues $x_n \varepsilon V$ para todo $n \varepsilon \mathbb{N}$, $n \geq K$. Por lo tanto $z \varepsilon \Theta$. Por otra parte, $z \varepsilon L^1 - L$ implica que $z \varepsilon A^1$. Se puede verificar que como $z \notin A$ se tiene que $z \varepsilon A^1 - A$. Así $z \varepsilon (A^1 - A) \cap \Theta$. Por lo tanto dado Θ que contiene a $\rho(\omega)$ existe $z \varepsilon A^1 - A$ tal que $z \varepsilon \Theta$. Esto implica que $\rho(\omega) \varepsilon \overline{A^1 - A}$.

LEMA 1.3.

Sea X un espacio secuencial Hausdorff. Sea $A \subset X$ y $\ell \varepsilon \overline{A}$, entonces existe un subconjunto $B \subset A$ tal que $|B| \leq x_o$ y $\ell \varepsilon \overline{B}$,

DEMOSTRACION:

Consideremos los siguientes casos:

i) Si $\ell \varepsilon A$ entonces hacemos $B = \{\ell\}$ y resulta evidente que $\ell \varepsilon \overline{B}$ y $|B| \leq \chi_o$.

ii) Supongamos entonces que $\ell \notin A$. Ahora como el espacio X es secuencial y $\ell \in \overline{A}$ existe un ordinal $\alpha \geq 1$ tal que $\ell \in A^{\alpha}$.

Si $\alpha = 1$ existe una sucesión $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$, en A tal que $\{x_n\}$ converge a ℓ y $x_n \neq \ell$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego si hacemos $B = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\}$, se tiene que $B \subset A$, $\ell \in \overline{B}$ y $|B| \leq \chi_o$.

Supongamos que $\alpha > 1$ y supongamos que el teorema es cierto para todo $\mu \in A^{\beta}$ con $\beta < \alpha$.

Si α es un ordinal límite se tiene que $A^{\alpha} = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A^{\beta}$. Así, si $\ell \in A^{\alpha}$ se tiene que $\ell \in A^{\beta}$ para algún $\beta < \alpha$ y por la hipotesis de inducción existe $B \subset A$ con $\ell \in \overline{B}$ con $\ell \in \overline{B}$ y $|B| \leq \chi_o$.

Si σ no es ordinal límite entonces tiene un predecesor. Así, $\alpha = \gamma + 1$ con $\gamma < \alpha$. Luego existe una sucesión $x_1, x_2, \ldots$, en A^{γ} tal que $\{x_n\}$ converge a ℓ pues por definición $A^{\alpha} = (A^{\gamma})^1$. Ahora por la hipotesis de inducción para cada x_i, $i \in \mathbb{N}$, existe $B_i \subset A$ con $x_i \in \overline{B}$ y $|B_i| \leq \chi_o$. Sea $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Es claro que $|B| \leq \chi_o$, $B \subset A$ y que $\ell \in \overline{B}$. Por lo tanto, por el principio de inducción transfinita el teorema es cierto.

<u>LEMA 1.4.</u>

Sea I el subconjunto de puntos aislados en F. Si $\ell \in A^1 - A$

entonces existe $V_\ell \subset I$ tal que $\ell \in \bar{V}_\ell$ y

$|V_\ell \cap \rho|\pi^*(S_1^n)|| < \chi_0 \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACION:

Puesto que $\ell \in A^1 - A$ existe una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que $\{x_n\}$ converge a ℓ. Ahora como F es Hausdorff existen abiertos disjuntos Θ_1 y Θ_2 en F tales que $\ell \in \Theta_1$ y $\rho(\omega) \in \Theta_2$. Puesto que $\rho(\omega) \in \Theta_2$ se tiene que existe un entero N_1, tal que para todo $n > N_1$, Θ_2 contiene a $\rho[\pi^*(S_1^n)]$, excepto un número finito de puntos aislados en cada uno de los $\rho[\pi^*(S_1^n)]$. Así, Θ_1 puede contener solamente un número finito de elementos en cada $\rho[\pi^*(S_1^*)]$ para todo $n > N_1$. Sea $G = \bigcup_{K=1}^{N_1} \rho|\pi^*(S_1^k)|$, y hagamos $\Theta_3 = \Theta_1 - G$.

Como G es compacto contenido en F se tiene que G es cerrado en F y por lo tanto Θ_3 es abierto en F. Así Θ_3 contiene a ℓ y un número finito de elementos en cada $\rho[\pi^*(S_1^k)]$; para todo $k > N_1$ y ningún punto en $\rho[\pi^*(S_1^k)]$, $1 \leq k \leq N_1$. Así, Θ_3 contiene todos los x_n excepto un número finito de ellos. Por lo tanto existe un entero positivo M tal que para todo $n \geq M$, x_n es un punto aislado en A y $x_n \in \Theta_3$. Así $V_\ell = \{x_n \mid n \geq M\}$ es el conjunto deseado.

LEMA 1.5.

Sea $\ell_1, \ell_2, \ldots\ldots, \ell_n, \ldots\ldots$ una colección numerable en $A^1 - A$.

Existe $V \subset I$, tal que $\ell_n \in \overline{V}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$|V \cap \rho[\pi^*(S_1^k)] < \chi_o$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACION:

Por el lema 1.4 dado ℓ_1 existe $V_{\ell_1} \subset I$ tal que $\ell_1 \in \overline{V}_{\ell_1}$ y $|V_{\ell_1} \cap \rho[\pi^*(S_1^n)]| < \chi_o$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Llamamos a V_{ℓ_1} por V_1 . Dado ℓ_2 existe $V_{\ell_2} \subset I$ tal que $\ell_2 \in \overline{V}_{\ell_2}$. Y $|V_{\ell_2} \cap \rho[\pi^*(S_1^n)]| < \chi_o$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $V_2 = V_{\ell_2} - \rho[\pi^*(S_1^1)]$. En forma similar definimos

$$V_n = V_{\ell_n} - \bigcup_{i=1}^{n-1} \rho|\pi^*(S_1^i)| .$$

El conjunto V definido por $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ tiene solamente un número finito de puntos aislados en cada $\rho|\pi^*(S_1^n)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $V \subset I$ y $\ell_n \in \overline{V}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

LEMA 1.6.

Si $G \subset A^1 - A$ y $|G| \leq \chi_o$ entonces $\rho(\omega) \notin \overline{G}$.

DEMOSTRACION:

Sea $G = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots\}$ un subconjunto finito o numerable de elementos de $A^1 - A$. Así por el lema 1.5 existe un subconjunto V de aislados en A tal que $\rho_n \in \overline{V}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $|V \cap \rho[\pi^*(S_1^n)]| < \chi_o$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así $G \subset \overline{V}$

lo cual implica que $\bar{G} \subset \bar{V}$. Por otra parte el lector podrá demostrar que V no tiene puntos límites en A, lo cual implica en particular que $\rho(\omega) \notin \bar{V}$. Por lo tanto $\rho(\omega) \notin \bar{G}$.

En este momento arribamos a una contradicción pues en el lema 1.2 demostramos que $\rho(\omega) \in \overline{A^1 - A}$ lo que por lema 1.3. implica que existe un $B \subset A^1 - A$ numerable tal que $\rho(\omega) \in \bar{B}$, hecho que resulta imposible en virtud del lema 1.6 por lo tanto, NO EXISTEN ESPACIOS SECUENCIALES COMPACTOS Y HAUSDORFF QUE POSEAN UNA COPIA DE S_2 . Ahora bien, como por definición de los espacios S_n se tiene que $S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \ldots\ldots \subsetneq S_n \subsetneq \ldots$ podemos concluir que ninguno de los espacios S_n, $n \geq 2$, puede ser sumergido en un espacio secuencial compacto y Hausdorff.

Como observación final hacemos notar que puesto que el espacio secuencial ψ^* es compacto y Hausdorff, entonces resulta obvio que ψ^* no puede poseer una copia de S_2.

El profesor M. Rajagopalan planteó en [1] las siguientes preguntas:

1) ¿ Para cúales pares (n,K) de enteros existe un espacio secuencial X de orden secuencial n que no contenga una copia de S_k con $K < n$?.

2) ¿Existe un espacio secuencial X de orden secuencial 3 que aún no contenga una copia de S_2?.

Con este trabajo damos respuesta a estas dos interrogantes haciendo uso del trabajo de A.I. Baskirov [4] en el que se demuestra que existe un espacio secuencial compacto de orden secuencial n para cada n.

BIBLIOGRAFIA

|1| M. RAJAGOPALAN : "Sequential order and Space S_n. Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 54 January 1976. 433-438.

|2| V. KANNAN : "Ordinal invariants in topology I. On the questions of Arhangel'ski and Franklin. General Topology and its aplications. Vol. 5 Nº 4 (1975). 269-296.

|3| ———— : "Ordinal invariants in Topology II. Fundamentae Mathematical.

|4| A.I. BASKIROV : "On the classifications of Quotient mapping and compact sequential spaces. Soviet Math. Deke. Vol. 15 (1974) Nº 4. 1104-1109.

|5| S.P. FRANKLIN : "Spaces in which sequences suffice. Fund. Math. 59 (1965). 107-115.

|6| R. VAIDAYANATHASWAMY: "Topology, Chelsea (New York) 1950.

|7| J. DUGUNDJI : "Topology, Allyn and Bacon (Boston) 1964.